# 2021 CCPC 分站赛 (广州)
# 题解要点

北京大学命题组

2021年11月14日

# Math Ball

## 题意

- n 种权值 $c_1 \ldots c_n$ 的球
- 最多取 $k_1 + \ldots k_n \le W$ 个
- 求 $\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n\le W} (\prod_{i=1}^{n} k_i^{c_i})$ 对 998244353 取模
- $n \le 10^5; \sum c_i \le 10^5; W \le 10^{18}$

# Math Ball

## 题解

- 考虑每种球生成函数 $p(x)=\sum_{i\ge 0} i^a x^i$
- 由第二类斯特林数卷积公式 $i^a=\sum_{k=1}^{a}\left\{{a \atop k}\right\} i^{\underline{k}}$
- 求出 $p(x)=\sum_{k=1}^{a}\left\{{a \atop k}\right\}k!\sum_{i\ge 0}\binom{i}{k}x^i=\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{(1-x)^{k-1}}\left\{{a \atop k}\right\}k!=\sum_{k=1}^{a}\frac{(1-x)^{a-(k-1)}}{(1-x)^a}\left\{{a \atop k}\right\}k!$
- 分子为 a 次多项式
- 定义 f(x) 为 n 个 c 对应的 p(x) 分子的乘积，
- 答案形同 $\frac{F}{(1-x)^{N+1}}$ 的第 w 次项，组合数求出即可。

# Sweeping Robots

## 题意

- 给一个长度为 n 的排列 p 和单调递增的序列 s
- 对于区间 [l,r]，设 min(p[l],p[l+1],...,p[r])=p[k]，定义其权值 val(l,r) = (min(s[r]-s[k],s[k]-s[l])+s[r]-s[l])*p[k]。
- q 次询问，每次询问一个区间 [l,r] 中权值最大的子区间。

- $n \le 500{,}000$
- $q \le 1{,}000{,}000$

# Sweeping Robots

# 题解

- 建出 p 的笛卡尔树，若询问 [l,r] 在 k 处被分裂，则答案为 max(val(l,r), 区间[l,k-1]的答案, 区间[k+1,r]的答案)
- 对于笛卡尔树上的每个点，用李超线段树维护其代表的区间的每个前后缀的答案。
- 以前缀pre的维护为例，先将左右儿子的pre合并，然后考虑所有跨过k的区间对pre能产生的贡献，这可以用常数条线段表示。
- 复杂度 $O(n \log^2 n)$（每条线段会被放到李超树上的O(logn)个点，而每次递归会使得李超树上一条线段的深度+1）

# Necklace

## 题意

- 给出长度为 N 的环状排列水晶，其中 M 个标记为特殊水晶。
- 要将这 N 个水晶划分成 M 个区间，每个区间覆盖一个特殊水晶。
- 问对于所有方案的最长一段区间长度，最小值是多少。

- $N < 10^{18}$ and $M \le 10^6$

# Necklace

## 题解

- 二分答案 L，判定最大长度为 L 的情况下，能否存在一种分割方案。
- 暴力枚举第一个分割线，尽量贪心地分割，使一段项链的右端点编号尽量大。对于某个水晶 st 作为第一串项链的第一个，如果贪心过程中出现了一段项链就算长度为 L，中间也没有一个特殊的，说明 st 可能太小了。
- 因此我们不枚举 st，而直接让 st 为其中一个特殊的水晶，如果出现这种状况，就说明L不合法。除此之外就只会出现另外一种状况，贪心往后取，取到最后一个水晶为 en，但从 st 到 en 依然无法覆盖所有水晶。
- 通过观察，如果前面有一段项链长度不足L，说明下一段项链是以特殊水晶开头的，假使这串项链起点的编号稍微小一点，下一串项链的编号也不会改变。这里我们尝试调整 st 的位置，其实可以以 en 为最后一个水晶，逆序实现上述贪心算法，可以在保证 en 不变的情况下，找到一个最小的 st'，如果此时已经足够覆盖 N 个水晶，那么L就是可行的。如果在这种情况下还不能覆盖，则L就不可行。

# Unnamed Easy Problem

## 题意

- idea $\in$ problem (idea set) $\in$ problem set
- 有 n 个 idea：0,1,2,…,n-1
- 定义合法的 problem 是一个idea的集合，其中至少包含一个 k,k+1,…,n-1 中的 idea
- （无序地）选择 m 个不同的 problem，对每个 idea 要求恰好出现了奇数/偶数次
  - idea 0,1,…,k-1 有 $o_{ee}$ 个出现奇数次，idea k,k+1,…,n-1 有 $o_{ez}$ 个出现奇数次
- 求方案数 mod 19260817

# Unnamed Easy Problem

## 题解

- 用集合幂级数构造生成函数
- 奇数次idea集 L={0,…,$o_{ee}$-1,k,…,k+$o_{ez}$-1}
- 超级简单idea集 B={0,1,…,k-1}
- 每个 problem 看成一个集合（位集合编码），选择 m 个异或和为 L 即可
- x为集合幂级数符号，$x^A x^B = x^{A \text{ XOR } B}$；
- y为生成函数的符号

题目集 idea集

题目

$$Ans = [x^L y^m] \prod_{T \not\subseteq B} (1 + x^T y)$$

$$F = FWT\Big(\prod_{T \not\subseteq B} (1 + x^T y)\Big)$$

$$= \sum_S x^S \prod_{T \not\subseteq B} \left(1 + (-1)^{|S \cap T|} y\right)$$

$$Ans = 2^{-n} \sum_T [x^T y^m] (-1)^{|L \cap T|} F$$

$$= 2^{-n} \sum_T (-1)^{|L \cap T|} [y^m] \prod_{S \not\subseteq B} \left(1 + (-1)^{|S \cap T|} y\right)$$

# Unnamed Easy Problem



$$= 2^{-n} \sum_{T} (-1)^{|L \cap T|} [y^m] \prod_{S \not\subseteq B} (1 + (-1)^{|S \cap T|} y)$$

- 分析该式前半部分，发现具有良好性质

$$\sum_{T \cap B \neq \varnothing} ((-1)^{|T \cap L|}) = \begin{cases} 2^n - 2^{n-k}, L = \varnothing \\ 0, L \not\subseteq B \\ -2^{n-k}, L \subseteq B \end{cases}$$

$$\sum_{T \cap B = \varnothing} ((-1)^{|T \cap L|}) = -1 + [L \subseteq B] 2^{n-k}$$

# Unnamed Easy Problem

## 题解

$$= 2^{-n}\sum_{T}(-1)^{|L\cap T|}[y^m]\prod_{S\not\subseteq B}(1+(-1)^{|S\cap T|}y)$$

- 分析该式后半部分
- 前三种情况都不难，只需一个组合数就计算完成
- 第四种情况可以O(m)的展开(1-y)²^k，相当于计算O(m)次上下指标都为O(模数)的组合数

$$\prod_{S\not\subseteq B}(1+(-1)^{|S\cap T|}y) = \begin{cases}(1+y)^{2^n-2^k}, T=\varnothing\\(1-y)(1-y^2)^{2^{n-1}-1}, T\neq\varnothing, B=\{0\}\\(1-y^2)^{2^{n-1}-2^{k-1}}, T\neq\varnothing, B\neq\{0\}, T\cap B\neq\varnothing\\(1-y)^{2^k}(1-y^2)^{2^{n-1}-2^k}, T\neq\varnothing, B\neq\{0\}, T\cap B=\varnothing\end{cases}$$

# Mathlab

## 题意

- 函数 f(x) 表示 x 的十六进展表示的所有数位求和
- 给定 n 位十六进展数 x 和指数 k，计算 $\sum_{i=0}^{x-1} f((16^k-1)i) \bmod 2^{64}$
- $1 \le k \le n \le 100$
- $5k \ge n$

# Mathlab

# 题解

- 考虑 $16^k x - x$，假设 $x = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$
- 退位分组：第 i、i+k、i+2k…等位的退位分到第 i 组
  - 由于 $5k \ge n$，第 i 组最多包括6次退位
- 假如知道第 i 组和第 i+1 组的退位，可用 DP 计算满足上述条件的在第i组的位置上填数字的方案数。
- 类似环上 DP 枚举退位组：f[i][j][k] 是初始退位状态 j，第 i 组退位组的退位状态为 k 的方案数。转移系数用另一个 DP 计算
- 时间复杂度 O(4m * 162 * mn + 8m * nk)，其中 m 是每个分组最大的退位数目（m=6）

# Cactus

## 题意

- 已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 分别为节点数目为 $1,2,\ldots,n$ 的仙人掌数目
- 计算 $\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{1+a_i-a_ia_j}{a_i-a_j}$

# Cactus

## 题解

- 任意元素互不相同的数列 $\{a_k\}$，均有答案 $F_1=F_2=1$ 和 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$
  - 只要数值互不相同，是否为仙人掌数目不重要
- 一种解决方法

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{1+a_i-a_ia_j}{a_i-a_j}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+a_i)^{n-1-k}a_i^k\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_k}(-a_{j_1})\cdots(-a_{j_k})\prod_{j\neq i}\frac{1}{a_i-a_j}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}[t^{n-1-k}]\sum_{i=1}^{n}(1+a_i)^{n-1-k}a_i^k\prod_{j\neq i}\frac{t-a_j}{a_i-a_j}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}[t^{n-1-k}]t^k(1+t)^{n-1-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1-k}{n-1-2k}=F_n
\end{aligned}
$$

拉格朗日插值展开

# Slope

## 题意

- 给出二维平面上 n 个点 $(x_i, y_i)$，点两两不同。
- q 次询问，每次给出矩形 $[x_l, x_r]\times[y_l, y_r]$，
- 求所有在矩形内的点对 i,j 中，斜率 $k = |(y_i-y_j)/(x_i-x_j)|$ 的最小值。

- $n \le 7 \times 10^3$
- $q \le 7 \times 10^5$
- 坐标绝对值不超过 $10^9$

# Slope

# 题解

- 离线询问，对于 $x_l$, $x_r$ 的限制使用莫队算法解决，维护所有横坐标在当前莫队区间内的点的集合，对于每个询问只需要在集合中考虑纵坐标的限制，可以发现在这种情况下一定有一个最优的点对是在按纵坐标排序后相邻的。
- 用线段树维护当前集合按照纵坐标排序后相邻点对的答案，对于集合中点的增删可以 $O(\log n)$ 维护，单组询问也是 $O(\log n)$，按照 $\sqrt{n^2/q}$ 的块大小分块，修改次数是 $O(n\sqrt{q})$，总复杂度为 $O(n \log n \sqrt{q})$。

# Three Integers

## 题意

- 给定三个非负整数 a、b 和 c
- 求三个正整数 x、y 和 z
- 满足 $x \bmod y = a$， $y \bmod z = b$ 且 $z \bmod x = c$。

- $0 \le a, b, c \le 1000{,}000{,}000$
- 输出满足 $1 \le x, y, z \le 10^{18}$

# Three Integers

## 题解

- 存在非负整数 u,v,w，使 x=wy+a，y=vz+b，z=ux+c。
- 如果 a=b=c，只有 a=b=c=0 的时候有解；
- 否则，不妨设 a>c，令 x=a，
- 只需取适当的 u,v 使得 z = ua+c > b 且 y = vz+b > a 即可。

# Pudding Store

## 题意

- 求有多少 1 到 n 的排列使得：
- 对每个 i，排列的前 i 项之和乘以 2 后能被 i 整除。
- $1 \le n \le 1{,}000{,}000{,}000$

# Pudding Store

## 题解上

- 记 F(n) 为满足条件的大小为 n 的排列数目，显然对 $n \le 3$，$F(n) = n!$。
- 若一个 n (n>3) 的排列合法，那么有

$$2\sum_{i=1}^{n-1} a_i = 2(\sum_{i=1}^{n} i - a_n) = n(n+1) - 2a_n = (n-1)(n+2) - 2(a_n - 1)$$

能被 $n-1$ 整除，于是由 $2(a_n - 1)$ 也能被 $n-1$ 整除知 **$a_n$ 只能取 1、(n+1)/2 或 n**。

- 于是讨论 $a_n$ 的取值：
- 当 $a_n = n$ 时，合法排列数显然为 $F(n-1)$。
- 当 $a_n = 1$ 时，考虑将一个 $n-1$ 的合法排列每项加 1，然后在最后加上 $a_n = 1$，这样得到的排列依然合法。个数仍为 $F(n-1)$。

# Pudding Store

## 题解下

- 最后讨论 $a_n = (n + 1) / 2$ 的情况。
- 此时有 $$2\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right) = 2\left(\sum_{l=1}^{n} i - a_{n-1} - \frac{n+1}{2}\right) = (n-2)(n+2) - (2a_{n-1} - 3)$$
- 由上式能被 $n - 2$ 整除知 $(2 a_{n-1} - 3)$ 是 $n - 2$ 的倍数；
- 而 $(2 a_{n-1} - 3)$ 一定是奇数，所以它只能等于 $n - 2$
- 于是推得 $a_{n-1} = (n+1)/2 = a_n$，矛盾。
- 综上 $n > 3$ 时有 $F(n) = 2 F(n - 1)$。
- 故 $n \le 3$ 时答案为 $n!$；$n > 3$ 时答案为 $6 \times 2^{n-3}$，使用快速幂即可。

# Cafeteria

# 题意

- 给定长度为 n 的字符串 a，长度为 m 的字符串 b。
- t 次询问，每次给定 l, r，询问 b 作为子序列在 $a_l\ a_{l+1}\ \dots\ a_r$ 中出现的次数。

- $n \le 200{,}000$
- $m \le 30$
- $t \le 1000000$

# Cafeteria

## 题解

- 首先有暴力的 DP 解法：dp[i][j] 表示做到 a[i] 时，b 中匹配长度为 j 的方案数，如果 a[i] = b[j+1] 可以进行转移。
- 对 a 的每个字符构造一个转移矩阵，可以在此基础上用矩阵乘法优化转移。
- 转移矩阵的形式是这样的：
- $T_k[i][i] = 1$
- $T_k[i][i+1] = (a[k] == b[i+1])$

```
>> T

T =

     1     0     0     0     0     0
     0     1     1     0     0     0
     0     0     1     1     0     0
     0     0     0     1     1     0
     0     0     0     0     1     1
     0     0     0     0     0     1
```

# Cafeteria

# 题解

- 做区间矩阵乘法，可以通过一个前缀积乘一个前缀积的逆。
- 对于 T 的逆，形式是这样的。

```
>> invT = inv(T)

invT =

     1     0     0     0     0     0
     0     1    -1     1    -1     1
     0     0     1    -1     1    -1
     0     0     0     1    -1     1
     0     0     0     0     1    -1
     0     0     0     0     0     1
```

- 这两个矩阵都比较特殊。
- 前者直接做矩阵乘法直接就是平方复杂度。
- 后者，容易发现第 i 行相对于第 i + 1 行的变化量总是不大的。
- 所以矩阵乘法的结果可以递推得到。

# Cafeteria



- 所以做矩阵乘法 $Q = T^{-1} P$ 的时候，很多时候 Q 的第 i 行其实就是 P 的第 i 行减去 Q 的第 i+1 行。
- 如图，Q 的第2行等于 P 的第2行减去 Q 的第 3 行。
- 把转移矩阵前缀积、逆矩阵前缀积都预处理出来。然后只存储有用的信息就可以做到 $O(nm)$ 空间。对于每次询问，就可以 $O(m)$ 解决了。这样的话复杂度是 $O(nm^2 + tm)$ 的。

```
>> invT = inv(T)

invT =

     1     0     0     0     0     0
     0     1    -1     1    -1     1
     0     0     1    -1     1    -1
     0     0     0     1    -1     1
     0     0     0     0     1    -1
     0     0     0     0     0     1

>> P

P =

     1     0     0     0     0     0
     0     1    -4    10   -20    35
     0     0     1    -4    10   -20
     0     0     0     1    -4    10
     0     0     0     0     1    -4
     0     0     0     0     0     1

>> Q = invT * P

Q =

     1     0     0     0     0     0
     0     1    -5    15   -35    70
     0     0     1    -5    15   -35
     0     0     0     1    -5    15
     0     0     0     0     1    -5
     0     0     0     0     0     1
```

# Magus Night

## 题意

- 求所有满足要求的 n 个数的连乘积之和
  - n 个数的最大公约数 GCD 不超过 q
  - n 个数的最小公倍数 LCM 不小于 p
  - $1 \le n \le 998244351$
  - $1 \le p,q \le m \le 200{,}000$
- i.e., 计算

$$\sum_{1 \le s_1, s_2, \ldots, s_n \le m} [\gcd(s_1, s_2, \ldots, s_n) \le q] \cdot [\operatorname{lcm}(s_1, s_2, \ldots, s_n) \ge p] \cdot \prod_{i=1}^{n} s_i$$

# Magus Night

# 题解$_{上}$

- 对集合 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ 记
  - 连乘积 $f(S) = \Pi_{si\in S}\, s_i$
  - 最大公约数 $gcd(S) = gcd(s_1,\ldots,s_n)$
  - 最小公倍数 $lcm(S) = lcm(s_1,\ldots,s_n)$
- $Z_m = \{S : \forall s_i \in S,\ 1 \le s_i \le m\}$
  - 划分 $Z_m = A_m \cup B_m \cup C_m$
  - $A_m = \{S : S\in Z_m \wedge gcd(S)\le q \wedge lcm(S)\ge p\}$
  - $B_m = \{S : S\in Z_m \wedge gcd(S)>q\}$
  - $C_m = \{S : S\in Z_m \wedge gcd(S)\le q \wedge lcm(S)<p\}$
- 原题求 $\Sigma_{S\in Am}\, f(S)$
  - $= \Sigma_{S\in Zm}\, f(S) - (\Sigma_{S\in Bm}\, f(S) + \Sigma_{S\in Cm}\, f(S))$
  - 而 $\Sigma_{S\in Zm}\, f(S) = (1+2+\ldots+m)^n$

- $\Sigma_{S\in Bm}\, f(S) = g_{q+1}(S) + g_{q+2}(S) + \ldots + g_m(S)$
  - 其中 $g_k(S) = \Sigma_{S\in Zm \wedge gcd(S)=k}\, f(S)$
  - 令 $h_d(S) = \Sigma_{S\in Zm \wedge d|gcd(S)}\, f(S) = \Sigma_{d|k}\, g_k(S)$
    - 如果 $d \mid S$，则 $h_d(S) = d^n\, \Sigma_{S\in Zm/d}\, f(S)$，时间 $O(\log n)$
  - 求系数 $\{x_d\}$，使 $\Sigma_d\, x_d\, h_d(S) = \Sigma_k\, y_k\, g_k(S)$
    - 其中 $y_k=0\ (k=1,\ldots,q)$；$y_k=1\ (k=q+1,\ldots,m)$

    (每个 $h_d(S)$ 为 $d|k$ 的 $g_k(S)$ 作了贡献)
    - 初始系数 $\{x_d\}$ 和 $\{y_k\}$ 置 0，迭代更新
    - 第 i 步，令 $x_{q+i} = 1 - y_{q+i}$，更新 $(q+i)|k$ 位置的 $y_k$ += $1-y_{q+i}$，其中对 $y_{q+i}$ 总贡献 $y_{q+i}+(1-y_{q+i})=1$
    - 执行完 m-q 步得到满足要求的序列 $\{x_d\}$ 和 $\{y_k\}$
    - 时间 $O(m \log n)$
- $\Sigma_{S\in Cm}\, f(S)$

# Magus Night

## 题解下

- 对集合 $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ 记
  - 连乘积 $f(S) = \Pi_{si \in S}\, s_i$
  - 最大公约数 $gcd(S) = gcd(s_1,...,s_n)$
  - 最小公倍数 $lcm(S) = lcm(s_1,...,s_n)$
- $Z_m = \{S : \forall s_i \in S,\ 1 \le s_i \le m\}$
  - 划分 $Z_m = A_m \cup B_m \cup C_m$
  - $A_m = \{S : S \in Z_m \wedge gcd(S) \le q \wedge lcm(S) \ge p\}$
  - $B_m = \{S : S \in Z_m \wedge gcd(S) > q\}$
  - $C_m = \{S : S \in Z_m \wedge gcd(S) \le q \wedge lcm(S) < p\}$
- 原题求 $\Sigma_{S \in Am}\, f(S)$
  - $= \Sigma_{S \in Zm}\, f(S) - (\Sigma_{S \in Bm}\, f(S) + \Sigma_{S \in Cm}\, f(S))$
  - 而 $\Sigma_{S \in Zm}\, f(S) = (1+2+...+m)^n$

- $\Sigma_{S \in Bm}\, f(S)$
- $\Sigma_{S \in Cm}\, f(S) = \Sigma_{d \le q,\ l \le p-1,\ d|l}\ \Sigma_{S \in Em,d,l}\, f(S)$
  - 其中 $E_{m,d,l} = \{S : S \in Z_m \wedge gcd(S)=d \wedge lcm(S)=l\}$
  - (d,l) 确定了 $S \in E_{m,d,l}$ 的 $X_p(S)$ 和 $Y_p(S)$
    - $X_p(S)$（$Y_p(S)$）为 S 每个数的素因子 p 的指数的最小（大）值
  - 利用以下容斥关系和乘法分配律，求出每个素因子 p 对 $\Sigma_{S \in Em,d,l}\, f(S)$ 的贡献并相乘（略）
    - $|\{S: X_p(S)=x, Y_p(S)=y\}| = |\{S: X_p(S) \ge x, Y_p(S) \le y\}| - |\{S: X_p(S) \ge x+1, Y_p(S) \le y\}| - |\{S: X_p(S) \ge x, Y_p(S) \le y-1\}| + |\{S: X_p(S) \ge x+1, Y_p(S) \le y-1\}|$
  - 时间 $O(m \log^2 m \log n)$ --- 可再优化，预处理所有三元组 $\{p, X_p(s), Y_p(s)\}$ 的值

# Dynamic Convex Hull

## 题意

- 给定包含 N 个点的二维点集 S
- 每次再给出 k 个点 R，查询点集 S ∪ R 的凸包面积

- $3 \le N \le 200{,}000$
- $1 \le k \le 10$

# Dynamic Convex Hull

## 题解

- 凸包面积 = 上凸壳积分 – 下凸壳积分
  - “– 下凸壳积分”，可将 y 坐标取反，转化为与“+ y取反的上凸壳积分”

- 上凸壳维护：点集按 x 排序，
- 当前凸壳可以用多个原凸壳的连续段 + 新点集的点表示，
- 用一个栈来维护即可。

- 时间复杂度 O(t log t)，其中 t=N+Σki

Thanks!